Soluzione commentata di Sandro Ronca

Ipotesi aggiuntive

Per poter svolgere il tema è necessario formulare alcune ipotesi aggiuntive:

a) fattore di potenza nominale del motore asincrono: $\cos(\varphi_1) = 0{,}85$
b) collegamento delle fasi rotoriche a stella
c) dipendenza delle perdite nel ferro dal quadrato della tensione di alimentazione: $P_{fe} = kV^2$
d) rendimento della dinamo: 82%

per maggior completezza possiamo anche supporre:

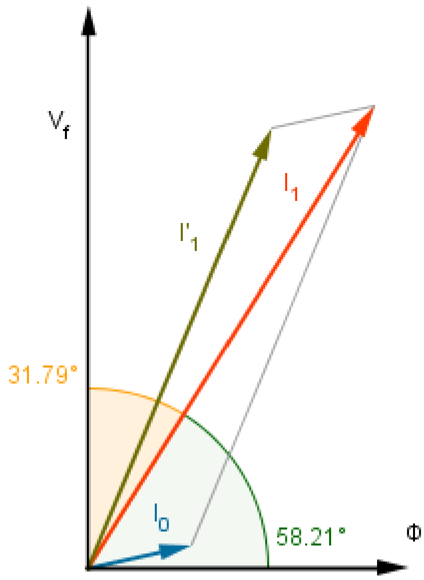
e) temperatura di rilievo della resistenza statorica motore: 20° C
f) temperatura di funzionamento a regime termico motore: 75°C
g) la caratteristica esterna della dinamo sia riportata alla temperatura di funzionamento
h) la caratteristica esterna della dinamo sia relativa alla velocità di rotazione imposta dal motore

1 - Motore asincrono: corrente nelle fasi rotoriche

Dal fattore di potenza $\cos(\varphi_1) = 0{,}85$ si ha $\varphi_1 = 31{,}78°$.
Assumendo come riferimento per gli angoli l'asse reale, su cui giace il vettore flusso, si ottiene la fase della corrente I_1: 90° – 31,78° = 58,21° (vedi diagramma vettoriale).
La corrente assorbita, in forma polare e algebrica è:

$$\mathbf{I_1} = 22 \ \underline{|58{,}21°} \ \text{A}$$

$$\mathbf{I_1} = 11{,}59 + j\ 18{,}7 \ \text{A}$$



Dalla prova a vuoto a tensione nominale:
$P_0 = 590$ W, $\cos(\varphi_0) = 0{,}21$ si ricava $\varphi_0 = \arccos(0{,}21) = 77{,}88°$
la fase della corrente a vuoto è: 90°– 77,88° = 12,12° ed il modulo:

$$I_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3}\mathbf{V_1}\cos(\varphi_0)} = \frac{590}{\sqrt{3 \cdot 380 \cdot 0{,}21}} = 4{,}27 \ \text{A}$$

In forma polare e algebrica:

$$\mathbf{I_0} = 4{,}27 \ \underline{|12{,}12°} \ \text{A}$$

$$\mathbf{I_0} = 4{,}17 + j\ 0{,}896 \ \text{A}$$

La corrente statorica di reazione I'_1 è data dalla differenza vettoriale tra I_1 e I_0:

$$\mathbf{I'_1} = \mathbf{I_1} - \mathbf{I_0} = 11{,}59 + j\ 18{,}7 - (4{,}17 + j\ 0{,}896) = 7{,}42 + j\ 17{,}8 \ \text{A}$$

$$I'_1 = \sqrt{7{,}42^2 + 17{,}8^2} = 19{,}3 \ \text{A} \quad \text{con fase:} \quad \text{arctg}\left(\frac{17{,}8}{7{,}42}\right) = 77{,}4°$$

$$\mathbf{I'_1} = 19{,}3 \ \underline{|67{,}4°} \ \text{A}$$

detto m il rapporto di trasformazione a circuiti di rotore aperti, si ha m = 1,3 e quindi si ottiene la corrente rotorica:

$$\boxed{I_2 = I'_1 \cdot m = 19{,}3 \cdot 1{,}3 = 25{,}1 \ \text{A}}$$

2 - Velocità di rotazione e resistenza di fase rotorica

Per rispondere al quesito è necessario conoscere il valore della potenza trasmessa (o potenza sincrona), P_T e delle perdite joule rotoriche, P_{JR}.
Dal rapporto

$$\frac{P_{JR}}{P_T} = s$$

si ottiene lo scorrimento s e quindi la velocità: $n_2 = n_1(1\text{-}s)$ in giri/minuto.

Da:

$$P_{JR} = 3 \cdot R_2 \cdot I_2^2$$

si ricaverà quindi la resistenza di fase rotorica R_2.

La potenza trasmessa P_T può essere calcolata così:

$$P_T = P_{AM} - P_{JS} - P_{Fe} - P_{add} \quad \text{oppure anche} \quad P_T = P_R + P_m + P_{JR}$$

In entrambe i casi si deve conoscere il valore delle perdite nel ferro $P_{Fe,}$ e/o delle perdite per attrito meccanico e viscoso P_m.

2.1 - Calcolo delle perdite meccaniche e nel ferro statorico

Per questo calcolo si utilizzano i dati delle due prove a vuoto.
E' noto che la potenza assorbita a vuoto P_0 contiene le perdite meccaniche P_m , le perdite nel ferro statoriche P_{Fe} (sono trascurabili le perdite nel ferro rotoriche, date le basse frequenze delle correnti rotoriche) e le perdite joule a vuoto:

$$P_0 = P_m + P_{Fe} + P_{JS0}$$

Innanzi tutto valutiamo queste ultime.
Teniamo presente che la misura di resistenza, come pure le prove a vuoto, vengono normalmente effettuate a "macchina fredda" per cui, avendo supposto che il dato di resistenza statorica si riferisca alla temperatura di 20°C useremo il valore $R_s = 0{,}28\ \Omega$.
Essendo R_s misurata tra due morsetti, indipendentemente dal tipo di collegamento, avremo per le perdite joule statoriche a vuoto:

$$P_{JS0} = \frac{3}{2} R_s \cdot I_0^2 = 1{,}5 \cdot 0{,}28 \cdot 4{,}27^2 = 7{,}66\ \text{W} \qquad \text{(prova a 380 V)}$$

$$P'_{JS0} = \frac{3}{2} R_s \cdot I'^2_0 = 1{,}5 \cdot 0{,}28 \cdot 3{,}88^2 = 6{,}32\ \text{W} \qquad \text{(prova a 340 V)}$$

Possiamo quindi scrivere un sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} P_m + P_{Fe} = 590 - 7{,}66 \\ P_m + P'_{Fe} = 525 - 6{,}32 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_m + P_{Fe} = 582 \\ P_m + P'_{Fe} = 519 \end{cases}$$

Osserviamo che nel sistema precedente si hanno tre incognite: P_m , P_{Fe}, P'_{Fe}.
Qui abbiamo posto la ragionevole ipotesi che P_m non vari sensibilmente passando da una prova a vuoto all'altra (empiricamente P_m può ritenersi proporzionale al cubo della velocità $P_m = k_m \cdot n_2^3$, ma la velocità a vuoto nel motore asincrono varia molto poco anche variando la tensione di alimentazione e quindi riteniamo che P_m mantenga praticamente lo stesso valore).
Diverso è il discorso per le perdite nel ferro statoriche P_{Fe} , che variano, grosso modo, con il quadrato della tensione:

$$P_{Fe} = k_{Fe} \cdot V^2 \qquad P'_{Fe} = k_{Fe} \cdot V'^2$$

Riscriviamo allora il sistema precedente:

$$\begin{cases} P_m + k_{Fe} \cdot 380^2 & = & 582 \\ P_m + k_{Fe} \cdot 340^2 & = & 519 \end{cases}$$

Abbiamo ora un sistema di equazioni nelle due incognite P_m e k_{Fe} .
Per risolvere rapidamente il sistema posso sottrarre la seconda equazione dalla prima (eliminando P_m):

$$\begin{cases} k_{Fe} \cdot (380^2 - 340^2) & = & 582 - 519 \\ P_m + k_{Fe} \cdot 380^2 & = & 582 \end{cases}$$

Quindi: $k_{Fe} = 2{,}19 \cdot 10^{-3} \quad \frac{W}{V^2}$ e per le perdite meccaniche:

$P_m = \underline{266\ W}$

Calcoliamo ora le perdite nel ferro statoriche alla tensione nominale:

$$P_{Fe} = k_{Fe} \cdot V^2 = 2{,}19 \cdot 10^{-3} \cdot 380^2 = \underline{316\ W}$$

2.2 - Potenza assorbita, perdite addizionali, perdite joule statoriche

Poiché il motore lavora a pieno carico, esso assorbirà la corrente nominale alla tensione nominale, calcolo quindi la potenza assorbita:

$$P_{AM} = \sqrt{3} \cdot V_1 \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1) = 1{,}732 \cdot 380 \cdot 22 \cdot 0{,}85 = \underline{12307\ W}$$

Le perdite addizionali sono valutate, secondo norma CEI, come lo 0,5% della potenza assorbita:

$$P_{add} = 0{,}005 \cdot 12307 = \underline{61{,}5\ W}$$

Le perdite nel rame statorico P_{JS} vanno valutate a regime termico. Nell'ipotesi che, sulla base della classe di isolamento, la temperatura di funzionamento del motore sia di 75°C, si ricava la resistenza statorica a tale temperatura:

$$R_{S75} = \frac{234{,}5+75}{234{,}5+20} \cdot R_s = 0{,}340\ \Omega$$

Con questo valore calcoliamo le perdite joule statoriche:

$$P_{JS} = \frac{3}{2} R_{S75} \cdot I_1^2 = 1{,}5 \cdot 0{,}340 \cdot 22^2 = \underline{247\ W}$$

2.3 - Calcolo della Potenza trasmessa

La potenza trasmessa o potenza sincrona, come già detto, può essere calcolata nel modo seguente:

$$P_T = P_{AM} - P_{JS} - P_{Fe} - P_{add}$$

$$P_T = 12307 - 247 - 316 - 61{,}5 = \underline{11682\ W}$$

2.4 - Calcolo della resistenza rotorica e della velocità di rotazione

Per ottenere il valore della resistenza rotorica serve conoscere le perdite joule rotoriche. Dobbiamo prima calcolare la potenza resa dal motore asincrono:

$$P_{RM} = \eta_M \cdot P_{AM} = 0{,}89 \cdot 12307 = \underline{10953\ W}$$

Calcoliamo quindi P_{JR}:

$$P_{JR} = P_T - P_m - P_{RM} = 11682 - 266 - 10953 = \underline{463\ W}$$

Nell'ipotesi che le fasi rotoriche siano collegate a stella determiniamo R_2:

$$\boxed{R_2 = \frac{P_{JR}}{3 \cdot I_2^2} = \frac{463}{3 \cdot 25{,}1^2} = 0{,}245\ \Omega}$$

Determiniamo ora lo scorrimento:

$$s = \frac{P_{JR}}{P_T} = \frac{463}{11682} = 0{,}0396$$

Essendo il motore una macchina a 4 poli, quindi con p = 2 coppie polari, la velocità sincrona è pari a:

$$n_1 = \frac{60 \cdot f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ giri/minuto}$$

calcoliamo quindi la velocità di rotazione:

$$\boxed{n_2 = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0{,}396) = 1441 \text{ giri/minuto}}$$

Possiamo anche calcolare le velocità angolari:

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{6{,}28 \cdot 1500}{60} = 157 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{6{,}28 \cdot 1441}{60} = 151 \text{ rad/s}$$

3 – Potenza meccanica trasmessa

Il terzo quesito non è formulato chiaramente.
Se si intende con Potenza meccanica trasmessa quella trasmessa dal motore alla dinamo, questa è semplicemente la potenza resa del motore, e cioè P_{RM} = 10953 W, precedentemente calcolata.
Normalmente, con potenza meccanica P_M del motore asincrono si intende la somma della potenza resa e le perdite per attrito:

$$P_M = P_{RM} + P_m = 10953 + 266 = 11219\ W$$

ma, se questo si intendeva chiedere, non ha molto senso aggiungere l'aggettivo “trasmessa”.
La richiesta potrebbe altresì riferirsi alla potenza trasmessa o potenza sincrona già calcolata:

$$P_T = 11682\ W$$

Più verosimile appare comunque la prima ipotesi.

4 – Coppia meccanica e coppia d'attrito

Anche questo quesito presenta un certo grado di ambiguità.
Con coppia meccanica C_M intendiamo solitamente la somma della coppia resa C_R e della coppia d'attrito C_m :

$$C_M = C_R + C_m$$

In questo caso abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned} C_R &= \frac{P_{RM}}{\omega_2} = \frac{10953}{151} = 72{,}5 \text{ Nm} \\ C_m &= \frac{P_m}{\omega_2} = \frac{266}{151} = 1{,}76 \text{ Nm} \end{aligned}}$$

e quindi:

$$\boxed{C_M = C_T = 72{,}5 + 1{,}76 = 74{,}3 \text{ Nm}}$$

Dove abbiamo messo in evidenza che la coppia meccanica è anche uguale alla coppia trasmessa (o coppia eletttromagnetica), cioè la coppia trasferita dallo statore al rotore.

Tuttavia è probabile che il redattore della prova intendesse, con coppia meccanica, la coppia resa dal motore.

5 – Dinamo

Il motore asincrono fornisce alla dinamo una potenza di 10953 W e la mantiene in rotazione con una velocità di 1441 giri/min.
Detta P_{AD} la potenza assorbita dalla dinamo:

$$P_{AD} = 10953 \text{ W}$$

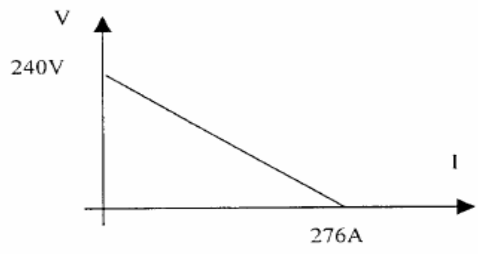
$$n = n_2 = 1441 \text{ giri/min}$$

5.1 – Tensione, corrente e potenza fornite al carico

Avendo ipotizzato un rendimento $\eta_D = 0{,}82$, possiamo determinare la potenza erogata P_{RD} dalla dinamo.
Detta V la tensione sul carico e I la corrente erogata sullo stesso dalla dinamo, avremo:

$$P_{RD} = V \cdot I = 0{,}82 \cdot 10953 = 8981 \text{ W}$$

Nell'ipotesi che la caratteristica esterna sia stata rilevata alla velocità di 1441 giri/min e alla temperatura di funzionamento, possiamo ricavare la relazione tra V ed I.
Abbiamo: fem a vuoto $E = E_0 = 240$ V (trascurando la reazione di indotto)
e corrente di corto circuito $I_{cc} = 276$ A.
Scriviamo l'equazione interna della dinamo:



$$E = V + R_i \cdot I$$

dove R_i rappresenta la resistenza di indotto, che supponiamo comprensiva della resistenza delle spazzole.
La precedente equazione fornisce l'equazione della caratteristica esterna:

$$V = -R_i \cdot I + E$$

Dal grafico ricaviamo:

$$E = 240\ \text{V}$$

$$R_i = \frac{E}{I_{cc}} = \frac{240}{276} = 0{,}87\ \Omega$$

L'equazione della caratteristica è allora:

$$V = -\,0{,}87 \cdot I + 240$$

Possiamo quindi scrivere un sistema di due equazioni nelle incognite V ed I:

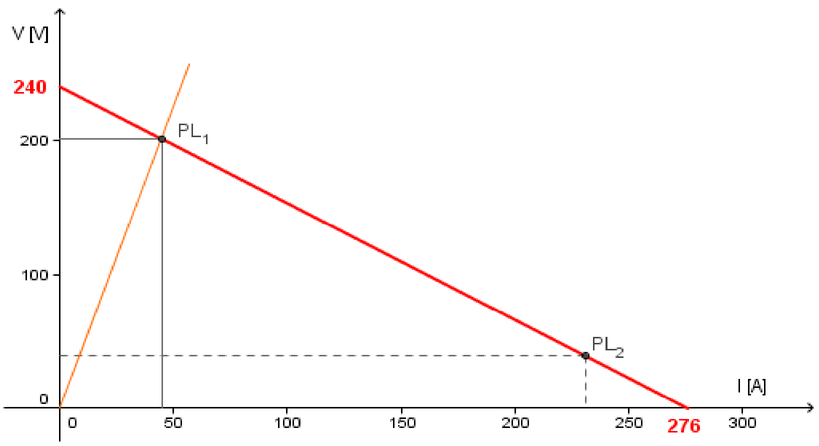
$$\begin{cases} V \cdot I = 8981 \\ V = -0{,}87 \cdot I + 240 \end{cases}$$

Sostituendo a V nella prima equazione l' espressione ricavata dalla seconda, otteniamo un'equazione di 2° grado in I:

$$0{,}87 \cdot I^2 - 240 \cdot I + 8981 = 0$$

che, risolta, dà le due radici: I = 44,6 A e I' = 231 A..
Abbiamo quindi due coppie di valori (matematicamente) possibili:

$$(1)\ \ PL_1: \begin{cases} V = 201{,}4\ \text{V} \\ I = 44{,}6\ \text{A} \end{cases} \qquad (2)\ \ PL_2: \begin{cases} V = 38{,}9\ \text{V} \\ I = 231\ \text{A} \end{cases}$$



I due punti di lavoro corrispondenti sono rappresentati nel grafico. Appare immediatamente evidente che PL_2 , molto spostato verso il funzionamento in corto circuito, non può costituire una condizione di funzionamento normale per la dinamo. In questo senso, la soluzione (2) è da scartare.
La risposta al quesito n. 5 è quindi:

$$\boxed{\begin{cases} V = 201{,}4\ \text{V} \\ I = 44{,}6\ \text{A} \end{cases} \qquad P = V \cdot I = 8982\ \text{W}}$$

6 – Conseguenze di una diminuzione del 20% della corrente erogata dalla dinamo

Questo è probabilmente il quesito più complesso del tema d'esame poiché richiede, per essere trattato con completezza, risposte articolate che fanno appello ad approfondite conoscenze del candidato sul funzionamento delle due macchine in questione.

Riassumiamo i dati relativi al funzionamento della dinamo:

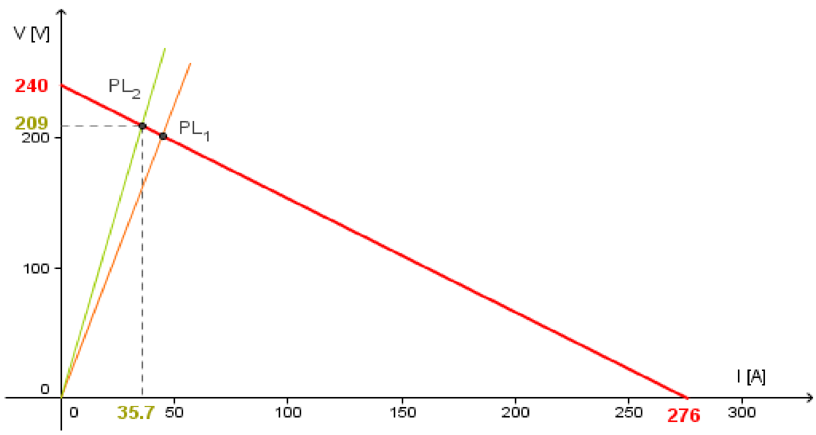
Potenza assorbita:	$P_{AD} = 10953$ W
Potenza erogata:	$P = 8982$ W
Tensione sul carico:	$V = 201{,}4$ V
Corrente erogata:	$I = 44{,}6$ A
Velocità di rotazione:	$n = 1441$ giri/minuto

Con questi dati è anche possibile ricavare la caratteristica del carico:

$$V = R \cdot I \qquad\qquad R = \frac{V}{I} = \frac{201{,}4}{44{,}6} = 4{,}51\ \Omega$$

Per semplicità, ammettiamo che il carico sia costituito da un semplice resistore, il cui valore è ovviamente indipendente dalle condizioni di funzionamento (V e I, se si suppone che il sistema sia a regime termico). Ciò non sarebbe vero se, ad esempio, il carico fosse costituito da un motore in corrente continua.
Una diminuzione del 20% della corrente comporta che quest'ultima assuma il valore:

$$I = 0{,}8 \cdot 44{,}6 = 35{,}7\ \text{A}$$



Come si vede dal grafico, abbiamo un nuovo punto di lavoro PL_2 .
Supponiamo che inizialmente la velocità non vari e che quindi la diminuzione di corrente erogata sia prodotta solamente dalla modifica della resistenza di carico.
Dall'equazione interna della dinamo ricaviamo il nuovo valore di V:

$$V = E - R_i \cdot I = 240 - 0.87 \cdot 35{,}7 = 208{,}96 = 209\ \text{V}$$

cui corrisponde una resistenza del carico pari a:

$$R = \frac{209}{35{,}7} = 5{,}85\ \Omega$$

Nelle considerazioni che seguono immaginiamo che questo valore resti invariato.

In queste condizioni, la dinamo eroga al carico una potenza

$$P = V \cdot I = 209 \cdot 35{,}7 = 7461 \text{ W}$$

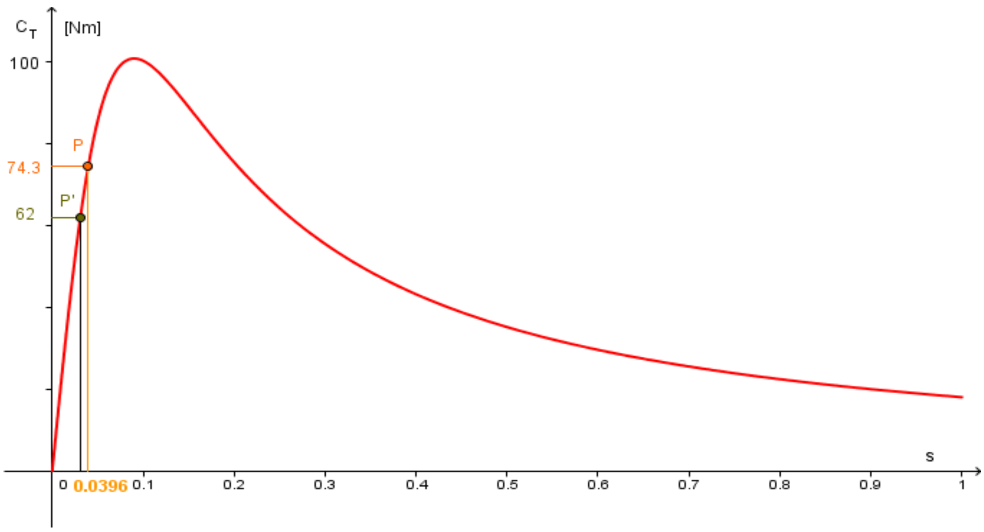
Nell'ipotesi che il rendimento mantenga lo stesso valore avremo

$$P_{AD} = \frac{P_{AD}}{\eta_D} = \frac{7461}{0{,}82} = 9099 \text{ W}$$

Questa è la potenza che il motore asincrono deve fornire alla dinamo.
Inizialmente la velocità resta costante e quindi la coppia richiesta per il funzionamento della dinamo, che prima era di 72,5 Nm, diviene:

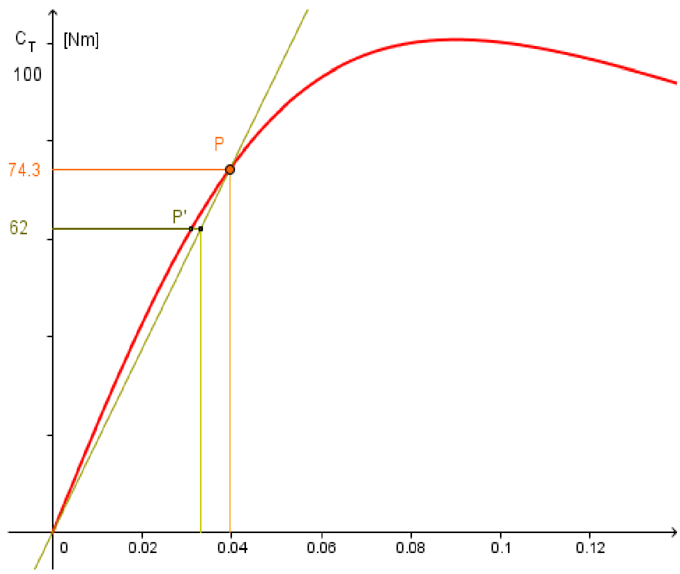
$$C_R = \frac{P_{RM}}{\omega_2} = \frac{9099}{151} = 60{,}26 \text{ Nm}$$

Corrispondente ad una coppia meccanica o trasmessa: $C_T = 60{,}26 + 1{,}76 = 62$ Nm



Diminuendo il carico meccanico, il motore è costretto ad accelerare, fino a ritrovare l'equilibrio meccanico tra la coppia resa e motrice, $C_R = C_{mot}$

Questo fatto si nota bene nel grafico della caratteristica meccanica del motore asincrono trifase sopra riportata.
Per una valutazione quantitativa si possono fare le seguenti considerazioni.
La caratteristica meccanica, come si vede nell'ingrandimento del tratto relativo al funzionamento stabile, si discosta poco dalla linearità. Per tale motivo può essere approssimata da una retta passante per l'origine delle coordinate e il punto P . Il coefficiente angolare è dato da: $\frac{74{,}3}{0{,}0396} = 1876{,}3$ e l'equazione della retta è: $C_T = 1876{,}3 \cdot s$
Con tale equazione è possibile calcolare il valore di s, dato il valore della coppia, evitando così di usare i valori delle reattanze di dispersione, che non sono dati dal problema ([1]).



Posto $C_T = 62$, si ricava $s = \dfrac{62}{1876,3} = 0,0330$

che dà la nuova velocità:

$$n_2 = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0,033) = 1450,5 \text{ giri/minuto}$$

Abbiamo una nuova caratteristica esterna della dinamo parallela alla precedente, poiché:

$$E' = \frac{1450,5}{1441} \cdot E = 241,6 \text{ V e } I'_{cc} = \frac{E'}{R_i} = \frac{241,6}{0,87} = 277,7 \text{ A}$$

Rimanendo invariata la R del carico a 5,85 Ω, possiamo ricavare il nuovo punto di lavoro della dinamo dal sistema:

$$\begin{cases} V = R \cdot I \\ V = -R_i \cdot I + E' \end{cases} \qquad \begin{cases} V = 5,85 \cdot I \\ V = -0,87 \cdot I + 241,6 \end{cases}$$

per confronto abbiamo:

$$5,85 \cdot I = -0,87 \cdot I + 241,6 \qquad 6,72 \cdot I = 241,6$$

$$I = 35,95 \text{ A} \qquad V = 5,85 \cdot 35,95 = 210,3 \text{ V}$$

e quindi una potenza erogata sul carico di:

$$P = V \cdot I = 210,3 \cdot 35,9 = 7550 \text{ W}$$

che comporta una potenza fornita dal motore (sempre considerando costante il rendimento):

$$P_{AD} = P_{RM} = \frac{7550}{0,82} = 9207 \text{ W}$$

La velocità angolare risulta:

$$\omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{6,28 \cdot 1450,5}{60} = 151,8 \text{ rad/s}$$

e la coppia richiesta dalla dinamo:

$$C_R = \frac{P_{RM}}{\omega_2} = \frac{9207}{151,8} = 60,65 \text{ Nm}$$

Il motore dovrà produrre una coppia trasmessa pari a:

$$C_T = 60,65 + 1,76 = 62,4 \text{ Nm}$$

che , da $C_T = 1876,3 \cdot s$, comporta uno scorrimento $s = 0,0332$ ed una velocità:

$$n_2 = n_1(1 - s) = 1500(1 - 0,0332) = 1450,2 \text{ giri/minuto}$$

vediamo quindi che la velocità tende a stabilizzarsi attorno ai 1450 giri al minuto (un ulteriore calcolo eseguito seguendo esattamente la stessa procedura darebbe: $E = 241,55$, $I_{cc} = 277,64$, $I = 35,94$, $V = 210,3$, $P = 7557$, $P_{AD} = 9216$, $C_R = 60,71$, $C_T = 62,47$, $s = 0,0333$, $n_2 = 1450$).
Assumendo quindi che il sistema si stabilizzi a 1450 giri/min con una $P_{RM} = 9216$ W e una coppia trasmessa $C_T = 62,5$ Nm, $s = 0,0333$, il motore dovrà erogare una potenza:

$$P_{RM} = 9216 \text{ W}$$

e assorbire una potenza:

$$P_{AM} = \frac{9216}{0,89} = 10355 \text{ W}$$

dove si è fatta l'ipotesi di costanza del rendimento in relazione alla portata delle variazioni qui viste degli altri valori.
Una valutazione approssimata della corrente assorbita si può ottenere utilizzando lo stesso valore del fattore di potenza $\cos(\varphi_1) = 0,85$ il quale, date le modeste variazioni dei parametri non potrà variare consistentemente.
Quindi:

$$I_1 = \frac{10355}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,85} = 18,51 \text{ A}$$

---

(1) In realtà i dati disponibili consentono di determinare X_2, ottenendo un valore di circa 2,7 Ω, a partire dalla formula analitica della coppia trasmessa. Con tale valore sono stati tracciati i grafici della caratteristica meccanica